TD 24 : Factorisation de polynômes et fractions rationnelles

Polynômes irréductibles

1 ★ On pose

$$A = 2X^4 - 3X^3 - 17X^2 + 27X - 9$$
$$B = 2X^4 - X^3 - 19X^2 + 9X + 9$$

1) Calculer $A \wedge B$ et déterminer sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
2) En déduire les décompositions de A et de B.
3) En déduire $A \vee B$.

2 ★★☆ Factoriser les polynômes suivants, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

- $P_1 = X^4 - 1$
- $P_2 = X^2 + X + 1$
- $P_3 = X^3 - 2$
- $P_4 = X^4 + X^2 + 1$
- $P_5 = X^6 + 1$
- $P_6 = X^n - 1,\ n \in \mathbb{N}^*$

3 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le PGCD de $A = X^n - 1$ et de $B = (X-1)^n$.

4 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Calculer $(X-1)P(X)$. En déduire une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$.

5 ★★★☆ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$, scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.

6 ★★★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) \geq 0$
(ii) $\exists A, B \in \mathbb{R}[X] \qquad P = A^2 + B^2$

Relations coefficients racines

7 ★★☆ Soit $P = 8X^3 - 4X^2 - 2X + 1$. Trouver les racines de P sachant que la somme de deux de ses racines fait 1.

8 ★★☆ Déterminer les solutions des systèmes suivants (les inconnues sont prises dans $\mathbb{C}$) :

1) $\begin{cases} a+b = i \\ ab = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a+b+c = -2 \\ ab+bc+ca = -1 \\ abc = 2 \end{cases}$

Fractions rationnelles : DES et généralités

9 ★★☆ Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

10 ★★ Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$:

- $F_1 = \dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$
- $F_2 = \dfrac{2X}{X^4 - X^2}$
- $F_3 = \dfrac{1}{X^2(X-1)^2}$
- $F_4 = \dfrac{1}{X^2 + X + 1}$
- $F_5 = \dfrac{4}{(X^2+1)^2}$
- $F_6 = \dfrac{1}{X^3 + 1}$
- $F_7 = \dfrac{1}{X^4 + X^2 + 1}$
- $F_8 = \dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$

11 ★★★☆ Soit un entier $n \geq 1$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

Applications de la DES

12 ★

1) Déterminer la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2) En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

13 ★★☆ Soit $F = \dfrac{1}{(X+1)^3(X-1)^3}$.

1) Étudier la parité de F puis obtenir sa décomposition en éléments simples.
2) En déduire des polynômes U et V tels que $(X-1)^3 U + (X+1)^3 V = 1$.

14 ★★☆ Calculer $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x} dx$. On pourra utiliser le changement de variables $t = \sin x$.

15 ★★ Calculer pour tout entier $n \geq 1$ la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \frac{x+2}{(x+1)^2(x-2)^2}$.

16 ★★★☆

1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \frac{X}{X^4+X^2+1}$.
2) En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}$.